Direct Solution of Linear Equations

stage1 一般的

Gauss消元过程和运算量

过程形式化表示。如图。

运算量计算。如图。

乘除运算 $\frac{n^3}{3}+n^2-\frac{n}{3}$

加减运算 $\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}-\frac{5n}{6}$

总运算量 $\frac{2n^3}{3}+o(n^2)$

矩阵LU分解

概念

$L'A=U,L=(L')^{-1}$------->$A=LU$

性质（存在，唯一

$A^{k+1}=L_kA^k$----------->$U=A^n=L_{n-1}\dots L_1A, A=(L_1^{-1}\dots L_{n-1}^{-1})U=LU$

L->单位下三角，U->非奇异上三角

解方程->LUx=b(Ly=b,Ux=y)

实现。如图。

选主元和PLU分解

部分选主元（列主元，剩余行选max----->目前首选，比普通稳定，只需非奇异

列主元LU分解　　（置换矩阵）$PA=LU$---->$Ly=Pb,Ux=y$

全主元（在剩余子矩阵选max------------------>稳定性更好，费时

全主元LU分解　$P_lAP_r=LU$------>$Ly=P_lbP_r,Ux=y$

stage2 特殊的

Cholesky 分解与平方根法

对于对称正定矩阵 A ，存在唯一对角线全为正的下三角 L ，$A=LL^T$，如图，稳定性与全主元相当

改进：LDL^T分解（D对角矩阵且元素正)不需要开根号 ---->对称且顺序主子不为0可如此分解（D不一定全正

三对角线性方程

对角占优，crout分解，乘除 $5n$ ，加减 $3n$

带状矩阵（没用

病态

改进->高精度、元素缩放、迭代算法