Iterative Solution of Linear Equations

定常迭代法

概述

迭代法基本概念

常用于稀疏矩阵，迭代序列 $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ ，有 $\lim_{k->\infty} x^{(k)} = x* = A^{-1}b$ ，定常迭代&子空间迭代（CG）

定常迭代法概念

每次迭代格式一致，例如 $A\Delta(x) = A(x^k - x^{(k-1)}) = b - Ax^{(k-1)} = b^{(k)}$

矩阵分裂是什么

$A = M - N$ ，（ A, M 非奇异 ）

基于矩阵分裂的定常迭代法

$Mx^{(k)} = Nx^{(k-1)} + b$

三种经典定常迭代法

Jacobi迭代法(A=D-L-U)

$M = D, N = L + U$ ， 迭代更新顺序与 i 无关适合并行

停机准则要求相对残量满足精度， $\dfrac{||b - Ax^{(k)}||}{||b - Ax^{(0)}||} < EPS$

GS（Gauss-Seidel）迭代法

$M = D - L, N = U$ ，$Dx^{(k)} = Lx^{(k)} + Ux^{(k-1)} + b$

运用已经更新的解，收敛速度更快

SOR迭代法

将 G-S 迭代法的 $x^{(k-1)}$ 与 $x^{(k)}$ 加权平均，获得更好的近似解， ω 松弛参数

$x^{(k)} = (1-\omega)x^{(k-1)} + \omega D^{-1}(Lx^{(k)} + Ux^{(k-1)} + b)$ ->

$x^{(k)} = (D - \omega L)^{-1}((1-\omega)D + \omega U)x^{(k-1)} + \omega(D - \omega L)^{-1}b$

$\omega < 1$ 低松弛， $\omega > 1$ 高松弛（通常）， $\omega = 1$ G-S迭代

例 编程实践: 用 Jacobi, G-S 和 SOR($\omega = 1.5$) 求解线性方程组 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

初始向量设为 $x^{(0)} = [0, 0, 0]^{\intercal}$.

(`Iter_Jacobi_GS_SOR_02.m`)